第27卷 第5期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 5
2010年10月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Oct. 2010

文章编号:1005-3085(2010)05-0820-07

埃尔米特广义汉密尔顿矩阵的广义逆特征值问题*

魏　平[1]， 张忠志[2]， 谢冬秀[3]

(1- 华南理工大学数学系，广州　510640； 2- 东莞理工学院计算机学院，东莞　523808；
3- 北京信息科技大学理学院，北京　100192)

摘　要: 本文利用埃尔米特广义汉密尔顿矩阵的性质与矩阵的分解理论，导出了埃尔米特广义汉密尔顿矩阵的广义逆特征值问题解的一般表达式。进而运用希尔伯特空间的逼近理论，对任意给定的n阶复矩阵对，证明相关最佳逼近解的存在性与惟一性，得到了最佳逼近解的表达式。

关键词: 埃尔米特广义汉密尔顿矩阵；广义逆特征值问题；最佳逼近

分类号: **AMS**(2000) 65F18; 15A09　　**中图分类号**: O241.6　　**文献标识码**: A

1　引言

矩阵的逆特征值问题与广义逆特征值问题在工程技术中有着广泛的应用，关于这类问题的研究已取得一系列成果。例如文献 [1,2] 分别就双对称矩阵和对称正交对称矩阵的逆特征值问题进行了研究，给出了可解的充分必要条件。文献 [3,4] 利用埃尔米特广义汉密尔顿矩阵的结构，分别就埃尔米特广义汉密尔顿矩阵逆特征值问题的可解条件和线性矩阵方程的埃尔米特广义汉密尔顿矩阵解进行了研究，并得到了它们的最佳逼近解。而文献 [5,6] 则分别就实对称矩阵的广义逆特征值问题和反对称正交反对称矩阵的广义逆特征值问题进行了研究，推得了问题解的一般表达式和最佳逼近解。本文就埃尔米特广义汉密尔顿矩阵的广义逆特征值问题进行探讨。

用$\mathbf{R}^{n\times m}$，$C^{n\times m}$分别表示所有$n\times m$阶实矩阵、复矩阵的集合，矩阵A的共轭转置和Moore-Penrose广义逆分别记为A^H和A^+，I_n表示n阶单位矩阵。$UC^{n\times n}$表示所有n阶酉矩阵的集合，rank(A)表示矩阵A的秩，对任意矩阵$A\in C^{m\times n}$，$B\in C^{p\times q}$，$A\otimes B$表示A与B的Kronecker积

$$A\otimes B=(a_{ij}B)\in C^{mp\times nq},\quad i=1,\cdots,m,\quad j=1,\cdots,n,\quad \forall\, A,B\in C^{n\times m},$$

$\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^HA)$ 表示A与B的内积，不难证明由此内积诱导的矩阵范数 $\|A\|=\sqrt{\langle A,A\rangle}$ 是Frobenius范数，且在该范数下$C^{n\times m}$是一个希尔伯特空间。令$OASR^{n\times n}$表示n阶实正交反对称矩阵集合，即

$$OASR^{n\times n}=\big\{J\,|\,J^TJ=JJ^T=I_n,\,J=-J^T,\,J\in\mathbf{R}^{n\times n}\big\}.$$

定义1　给定$J\in OASR^{n\times n}$，若$A\in C^{n\times n}$满足$A^H=A$，$JAJ=A^H$，则称A为n阶埃尔米特广义汉密尔顿矩阵，所有n阶埃尔米特广义汉密尔顿矩阵的全体记为$HHC^{n\times n}$。

定义2　设$A=(a_{ij})_{n\times m}$，记$\alpha_i=(a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni})$，$i=1,\cdots,m$，令

$$vec(A)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)^T,$$

收稿日期: 2008-12-15.　**作者简介**: 魏平 (1982年12月生)，男，硕士. 研究方向：数值线性代数.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10971058)；北京市教学名师建设项目 (61N0810810).

则称 $vec(A)$ 为矩阵 A 的列拉直。

定义3 给定 $J \in OASR^{n\times n}$，对任意的 $x \in C^n$，则

1) 若 $\mathrm{i}Jx = x$，则称 x 为 J-对称向量，n 维对称向量的全体记为 SC^n。

2) 若 $\mathrm{i}Jx = -x$，则称 x 为 J-反对称向量，n 维反对称向量的全体记为 ASC^n。

显然，集合 $HHC^{n\times n}$ 是 $C^{n\times n}$ 的一个线性子空间，而且它与矩阵 J 有关，全文总是假定矩阵 J 是不变的。运用矩阵 J 的性质，有 $J^2 = -I_n$，因此，n 必是偶数。

令

$$P_1 = \frac{1}{2}(I + \mathrm{i}J), \quad P_2 = \frac{1}{2}(I - \mathrm{i}J),$$

其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$。

不难证明 P_1 和 P_2 都是正交投影矩阵，而且有 $P_1 + P_2 = I$, $P_1P_2 = 0$。因此，存在单位列正交矩阵 $U_1, U_2 \in C^{n\times k}\,(n = 2k)$，使得 $P_1 = U_1U_1^H$, $P_2 = U_2U_2^H$，记 $U = (U_1, U_2)$，由矩阵 P_1, P_2 的性质，容易证明 U 是 n 阶酉矩阵，即 $U \in UC^{n\times n}$。

问题1 给定

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in C^{n\times m}, \quad \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m) \in C^{m\times m},$$

求矩阵 A, $B \in HHC^{n\times n}$ 使得

$$AX = BX\Lambda. \tag{1}$$

问题2 对于任意给定的矩阵 $\widetilde{A}$, $\widetilde{B} \in C^{n\times n}$，求 $(\widehat{A}, \widehat{B}) \in S_{A,B}$ 使得

$$\|(\widehat{A}, \widehat{B}) - (\widetilde{A}, \widetilde{B})\| = \min_{(A,B)\in S_{A,B}} \|(A, B) - (\widetilde{A}, \widetilde{B})\|, \tag{2}$$

其中 $S_{A,B}$ 是问题1的解。

本文结构如下：在第二节利用埃尔米特广义汉密尔顿矩阵的性质推导问题1解的一般表达式。第三节证明问题2解的存在性与惟一性，并给出最佳逼近解的表达式。第四节给出求解问题2的算法及数值例子。

2 问题1的解

引理1[7] 设 $A \in C^{m\times n}$, $b \in C^m$，则线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是 $AA^+b = b$。这时方程组的通解为 $x = A^+b + (I - A^+A)z$，对任意的 $z \in C^n$。

引理2[8] 若令

$$S = \left\{ A \,|\, A = U \begin{pmatrix} 0 & N \\ N^H & 0 \end{pmatrix} U^H,\ N \in C^{k\times k} \right\}, \tag{3}$$

则有 $S = HHC^{n\times n}$。

不难证明下面引理。

引理3 已知 $W \in C^{n\times m}$, $R \in C^{n\times m}$，则 $\|T - R\|^2 + \|T - W\|^2 = \min$, $T \in C^{n\times m}$ 的解为

$$T = \frac{1}{2}(R + W). \tag{4}$$

引理4 若矩阵 A, $B \in HHC^{n\times n}$，则对矩阵广义特征值问题 $AX = BX\Lambda$，其特征向量可表示为 J-对称向量或 J-反对称向量。

证明 由 $Ax=\lambda Bx$ 及 $A,B\in HHC^{n\times n}$ 知 $JAJx=\lambda JBJx$，进而 $A(Jx)=\lambda B(Jx)$，因此，若 x 是 A,B 的广义特征向量，则恒有 Jx 也是 A,B 的广义特征向量，所以 x 与 Jx 必定线性相关。则存在不全为零的复数 k_1,k_2 使得 $k_1x+k_2Jx=0$，两边同时左乘以 J 得 $k_1Jx-k_2x=0$，由这两式可得 $k_1^2+k_2^2=0$，因此，$k_1=\pm\mathrm{i}k_2$，即有 $\mathrm{i}Jx=\pm x$。

记

$$U^HX=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix},$$

其中 $X_1\in C^{k\times m}$，$X_2\in C^{k\times m}$，设

$$r_1=\mathrm{rank}\left\{\begin{pmatrix}X_2\\-X_2\Lambda\end{pmatrix}\right\},$$

$\begin{pmatrix}X_2\\-X_2\Lambda\end{pmatrix}$ 的奇异值分解为

$$\begin{pmatrix}X_2\\-X_2\Lambda\end{pmatrix}=H\begin{pmatrix}\Sigma&0\\0&0\end{pmatrix}Q^H=H_1\Sigma Q_1^H, \tag{5}$$

其中

$$H=(\underset{r_1}{H_1},\ \underset{n-r_1}{H_2})\in UC^{n\times n},\quad Q=(\underset{r_1}{Q_1},\ \underset{m-r_1}{Q_2})\in UC^{m\times m},\quad H_2^H=(\underset{k}{S_1},\underset{k}{S_2})\in C^{(n-r_1)\times n}.$$

再设

$$r_2=\mathrm{rank}\{(S_1^T\otimes X_1^H)-S_2^T\otimes(\Lambda^HX_1^H)\},$$

$\{(S_1^T\otimes X_1^H)-S_2^T\otimes(\Lambda^HX_1^H)\}$ 的奇异值分解为

$$(S_1^T\otimes X_1^H)-S_2^T\otimes(\Lambda^HX_1^H)=E\begin{pmatrix}\Gamma&0\\0&0\end{pmatrix}F^H=E_1\Gamma F_1^H,$$

其中

$$F=(\underset{r_2}{F_1},\ \underset{k(n-r_1)-r_2}{F_2})\in C^{k(n-r_1)\times k(n-r_1)}.$$

定理1 设

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_m)\in C^{n\times m},\quad \Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)\in C^{m\times m},$$

则问题1的解为

$$A=U\begin{pmatrix}0&GS_1\\(GS_1)^H&0\end{pmatrix}U^H,\quad B=U\begin{pmatrix}0&GS_2\\(GS_2)^H&0\end{pmatrix}U^H, \tag{6}$$

其中 $G\in C^{k\times(n-r_1)}$ 满足 $vec(G)=F_2K$，$K\in C^{k(n-r_1)-r_2}$ 为任意复列向量。

证明 由引理2知，A, B 可表示为

$$A = U\begin{pmatrix} 0 & N_1 \\ N_1^H & 0 \end{pmatrix} U^H, \quad B = U\begin{pmatrix} 0 & N_2 \\ N_2^H & 0 \end{pmatrix} U^H, \tag{7}$$

由 $AX = BX\Lambda$ 有

$$U\begin{pmatrix} 0 & N_1 \\ N_1^H & 0 \end{pmatrix} U^H X = U\begin{pmatrix} 0 & N_2 \\ N_2^H & 0 \end{pmatrix} U^H X\Lambda,$$

则

$$\begin{pmatrix} 0 & N_1 \\ N_1^H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & N_2 \\ N_2^H & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1\Lambda \\ X_2\Lambda \end{pmatrix},$$

即有

$$N_1X_2 = N_2X_2\Lambda, \tag{8}$$

$$N_1^HX_1 = N_2^HX_1\Lambda. \tag{9}$$

由 (8) 式得

$$(N_1, N_2)\begin{pmatrix} X_2 \\ -X_2\Lambda \end{pmatrix} = 0,$$

所以

$$(N_1, N_2) = GH_2^H = G(S_1, S_2), \tag{10}$$

其中 S_1, $S_2 \in C^{(n-r_1)\times k}$，$G \in C^{k\times(n-r_1)}$ 为任意矩阵。

由 (9) 式有 $X_1^HN_1 = \Lambda^HX_1^HN_2$，再将 (10) 式代入得

$$X_1^HGS_1 = \Lambda^HX_1^HGS_2, \tag{11}$$

进而

$$\left[(S_1^T \otimes X_1^H) - S_2^T \otimes (\Lambda^HX_1^H)\right]vec(G) = 0, \tag{12}$$

则由引理1知 (12) 式的解为

$$vec(G) = F_2K, \quad K \in C^{k(n-r_1)-r_2}, \tag{13}$$

将 (10) 式与 (13) 式代入 (7) 式即得问题1的解 (6) 式。

3 问题2的解

定理2 任意给定矩阵 $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in C^{n\times n}$，则问题2有唯一的最佳逼近解，且这个解可表示为

$$\widehat{A} = U\begin{pmatrix} 0 & \widehat{G}S_1 \\ (\widehat{G}S_1)^H & 0 \end{pmatrix} U^H, \quad \widehat{B} = U\begin{pmatrix} 0 & \widehat{G}S_2 \\ (\widehat{G}S_2)^H & 0 \end{pmatrix} U^H, \tag{14}$$

其中 $\widehat{G}\in C^{k\times(n-r_1)}$ 满足

$$vec(\widehat{G})=\frac{F_2F_2^H[vec((U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_2)+vec((U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_2)]}{2}. \tag{15}$$

证明 由定理1和 F-范数的正交不变性有

$$\begin{aligned}
&\left\|(A,B)-(\widetilde{A},\widetilde{B})\right\|^2\\
=&\left\|A-\widetilde{A}\right\|^2+\left\|B-\widetilde{B}\right\|^2\\
=&\left\|\begin{pmatrix}0 & GS_1\\ (GS_1)^H & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}U_1^H\widetilde{A}U_1 & U_1^H\widetilde{A}U_2\\ U_2^H\widetilde{A}U_1 & U_2^H\widetilde{A}U_2\end{pmatrix}\right\|+\left\|\begin{pmatrix}0 & GS_2\\ (GS_2)^H & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}U_1^H\widetilde{B}U_1 & U_1^H\widetilde{B}U_2\\ U_2^H\widetilde{B}U_1 & U_2^H\widetilde{B}U_2\end{pmatrix}\right\|\\
=&\left\|GS_1-U_1^H\widetilde{A}U_2\right\|^2+\left\|GS_2-U_1^H\widetilde{B}U_2\right\|^2+\left\|GS_1-U_1^H\widetilde{A}^HU_2\right\|^2+\left\|GS_2-U_1^H\widetilde{B}^HU_2\right\|^2\\
&+\left\|U_1^H\widetilde{A}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{A}U_2\right\|^2+\left\|U_1^H\widetilde{B}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{B}U_2\right\|^2\\
=&\left\|G(S_1,S_2)-(U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)\right\|^2+\left\|G(S_1,S_2)-(U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)\right\|^2\\
&+\left\|U_1^H\widetilde{A}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{A}U_2\right\|^2+\left\|U_1^H\widetilde{B}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{B}U_2\right\|^2\\
=&\left\|GH_2^HH-(U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H\right\|^2+\left\|GH_2^HH-(U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H\right\|^2\\
&+\left\|U_1^H\widetilde{A}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{A}U_2\right\|^2+\left\|U_1^H\widetilde{B}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{B}U_2\right\|^2\\
=&\left\|G-(U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_2\right\|^2+\left\|G-(U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_2\right\|^2\\
&+\left\|(U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_1\right\|^2+\left\|(U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_1\right\|^2\\
&+\left\|U_1^H\widetilde{A}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{A}U_2\right\|^2+\left\|U_1^H\widetilde{B}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{B}U_2\right\|^2\\
=&\left\|F_2K-vec((U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_2)\right\|^2+\left\|F_2K-vec((U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_2)\right\|^2\\
&+\left\|(U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_1\right\|^2+\left\|(U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_1\right\|^2\\
&+\left\|U_1^H\widetilde{A}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{A}U_2\right\|^2+\left\|U_1^H\widetilde{B}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{B}U_2\right\|^2\\
=&\left\|K-F_2^Hvec((U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_2)\right\|^2+\left\|K-F_2^Hvec((U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_2)\right\|^2\\
&+\left\|F_1^Hvec((U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_2)\right\|^2+\left\|F_1^Hvec((U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_2)\right\|^2\\
&+\left\|(U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_1\right\|^2+\left\|(U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_1\right\|^2\\
&+\left\|U_1^H\widetilde{A}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{A}U_2\right\|^2+\left\|U_1^H\widetilde{B}U_1\right\|^2+\left\|U_2^H\widetilde{B}U_2\right\|^2.
\end{aligned}$$

由引理3知

$$\min_{(A,B)\in S_{A,B}}\left\|(A,B)-(\widetilde{A},\widetilde{B})\right\|,$$

当且仅当

$$K=\frac{F_2^H[vec((U_1^H\widetilde{A}U_2,U_1^H\widetilde{B}U_2)H_2)+vec((U_1^H\widetilde{A}^HU_2,U_1^H\widetilde{B}^HU_2)H_2)]}{2}. \tag{16}$$

将(16)式代入(7)式即得问题2的解。

4 算法及数值例子

算法 求解问题2的步骤如下：

1) 输入 $J, \widetilde{A}, \widetilde{B}, X, \Lambda$；

2) 由 $P_1 = \frac{1}{2}(I + \mathrm{i}J)$，$P_2 = \frac{1}{2}(I - \mathrm{i}J)$，计算 P_1, P_2；

3) $P_1 = U_1U_1^H$，$P_2 = U_2U_2^H$，$U = (U_1, U_2)$ 计算 U_1, U_2, U；

4) 由 (5) 式计算 H_2, S_1, S_2；

5) 由 (15) 式计算 G；

6) 最后按 (14) 式计算 $\widehat{A}, \widehat{B}$。

例子 $n = 4$，$m = 2$，$k = 2$，给定

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 0.7071 & 0.7071 \\ -0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071\mathrm{i} & -0.7071\mathrm{i} \\ -0.7071\mathrm{i} & 0.7071\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 2+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 3-8\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0.5310 + 0.4394\mathrm{i} & 0.3697 + 0.1192\mathrm{i} & 0.8380 + 0.4301\mathrm{i} & 0.4213 + 0.8485\mathrm{i} \\ 0.7628 + 0.1702\mathrm{i} & 0.7785 + 0.6351\mathrm{i} & 0.5283 + 0.9976\mathrm{i} & 0.6503 + 0.4354\mathrm{i} \\ 0.9137 + 0.1837\mathrm{i} & 0.9785 + 0.0770\mathrm{i} & 0.2035 + 0.3861\mathrm{i} & 0.9605 + 0.4740\mathrm{i} \\ 0.7174 + 0.0825\mathrm{i} & 0.0578 + 0.1941\mathrm{i} & 0.0660 + 0.5052\mathrm{i} & 0.3904 + 0.5693\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} 0.1572 + 0.7103\mathrm{i} & 0.5637 + 0.0807\mathrm{i} & 0.0781 + 0.5058\mathrm{i} & 0.0432 + 0.7366\mathrm{i} \\ 0.0791 + 0.9287\mathrm{i} & 0.6270 + 0.2687\mathrm{i} & 0.5883 + 0.6907\mathrm{i} & 0.5444 + 0.7839\mathrm{i} \\ 0.0457 + 0.1103\mathrm{i} & 0.3349 + 0.2047\mathrm{i} & 0.7257 + 0.4955\mathrm{i} & 0.6301 + 0.9093\mathrm{i} \\ 0.2786 + 0.0951\mathrm{i} & 0.4144 + 0.9163\mathrm{i} & 0.2733 + 0.6343\mathrm{i} & 0.1257 + 0.3191\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

按以上算法得结果如下

$$S_1 = \begin{pmatrix} -0.2887 & 0.9353 \\ 0.5774 + 0.2887\mathrm{i} & 0.1293 + 0.0647\mathrm{i} \\ 0.5774 + 0.2887\mathrm{i} & 0.1293 + 0.0647\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0.1293 - 0.0647\mathrm{i} & 0.1293 - 0.0647\mathrm{i} \\ 0.6767 & -0.3233 \\ -0.3233 & 0.6767 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} -0.1319 + 0.7948\mathrm{i} & -0.1841 - 0.4505\mathrm{i} & -0.1077 + 0.1168\mathrm{i} \\ 0.2543 - 0.9033\mathrm{i} & 0.1647 + 0.5271\mathrm{i} & 0.0772 - 0.0693\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

最后得 $\widetilde{A}, \widetilde{B}$ 的唯一最佳逼近解 $\widehat{A}, \widehat{B}$ 为

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} -0.0341 & 0.1027 - 0.0433\mathrm{i} & 0.6382 + 0.0368\mathrm{i} & 0.5063 \\ 0.1027 + 0.0433\mathrm{i} & 0.2395 & 0.7700 & 0.6382 - 0.0368\mathrm{i} \\ 0.6382 - 0.0368\mathrm{i} & 0.7700 & -0.2395 & -0.1027 - 0.0433\mathrm{i} \\ 0.5063 & 0.6382 + 0.0368\mathrm{i} & -0.1027 + 0.0433\mathrm{i} & 0.0341 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} -0.0554 & -0.0410 - 0.0451\mathrm{i} & 0.2909 + 0.0200\mathrm{i} & 0.2313 \\ -0.0410 + 0.0451\mathrm{i} & -0.0266 & 0.3506 & 0.2909 - 0.0200\mathrm{i} \\ 0.2909 - 0.0200\mathrm{i} & 0.3506 & 0.0266 & 0.0410 - 0.0451\mathrm{i} \\ 0.2313 & 0.2909 + 0.0200\mathrm{i} & 0.0410 + 0.0451\mathrm{i} & 0.0554 \end{pmatrix}.$$

参考文献:

[1] 胡锡炎，张磊，谢冬秀. 双对称矩阵逆特征值问题解存在的条件[J]. 计算数学，1998, 20(4): 409-418
Hu X Y, Zhang L, Xie D X. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problem of bisymmetric matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica, 1998, 20(4): 409-418

[2] 胡锡炎，张磊，周富照. 对称正交对称矩阵逆特征值问题[J]. 计算数学，2003, 25(1): 13-22
Hu X Y, Zhang L, Zhou F Z. The inverse eigenvalue problem of symmetric ortho-symmetric matrices[J]. Mathematica Numerica Sinica, 2003, 25(1): 13-22

[3] Zhang Z Z, Hu X Y, Zhang L. The solvability conditions for the inverse eigenvalue problem of Hermitian-generalized Hamiltonian matrices[J]. Inverse Problems, 2002, 18: 1369-1376

[4] Zhang Z Z, Hu X Y, Zhang L. On the Hermitian-generalized Hamiltonian solutions of linear matrix equation[J]. SIAM J Matrix Anal Applm, 2005, 27(1): 294-303

[5] 戴华. 谱约束下实对称矩阵束的最佳逼近[J]. 高等学校计算数学学报，1990, 2(6): 177-187
Dai H. Optimal approximation of real symmetric matrix pencil under spectral restriction[J]. Numerical Mathematics: a Journal of Chinese Universities, 1990, 2(6): 177-187

[6] 李伯忍，胡锡炎，刘学杰. 谱约束下反对称正交反对称矩阵束的最佳逼近[J]. 数值计算与计算机应用，2007, 28(4): 282-289
Li B R, Hu X Y, Liu X J. Optimal approximation of anti-symmetric and orth-anti-symmetric matrix under spectral restriction[J]. Journal on Numerical Mathods and Computer Applications, 2007, 28(4): 282-289

[7] 戴华. 矩阵论[M]. 北京：科学出版社，2001
Dai H. Matrix Theory[M]. Beijing: Science Press, 2001

[8] Zhang Z Z, Hu X Y, Zhang L. Least-squares solutions of inverse problem for Hermitian generalized Hamiltonian matrices[J]. Applied Mathematics Letters, 2004, 17: 303-308

Generalized Inverse Eigenvalue Problem for Hermitian Generalized Hamiltonian Matrices

WEI Ping[1], ZHANG Zhong-zhi[2], XIE Dong-xiu[3]

(1- Department of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640;
2- School of Computer Science and Technology, Dongguan University of Technology, Dongguan 523808;
3- School of Sciences, Beijing Information Science and Technology University, Beijing 100192)

Abstract: By means of properties of Hermitian generalized Hamiltonian matrices and the matrix decomposition theory, we derive expressions of the generalized inverse eigenvalue problem for Hermitian generalized Hamiltonian matrices. By using the Hilbert space approximation theory, for any given square complex matrices, we prove that there is only one optimal approximation solution, and furthermore derive expressions of the optimal approximation solution.

Keywords: Hermitian generalized Hamiltonian matrices; generalized inverse eigenvalue problem; optimal approximation

Received: 15 Dec 2008. **Accepted:** 17 Dec 2009.

Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10971058); the Beijing Construction Projects of Master Teachers (61N0810810).